

# Récupération optimale de l'énergie dans les réseaux d'échangeurs de chaleur—I. Etude théorique

C. GUIGLION, S. DOMENECH et L. PIBOULEAU

ENSIGC, UA CNRS 192, Chemin de la Loge, 31078 Toulouse Cedex, France

(Reçu le 7 janvier 1988 et sous forme finale le 31 mars 1988)

**Résumé**—Les auteurs présentent une étude fondamentale de la théorie thermodynamique des réseaux d'échangeurs de chaleur qui concerne la récupération optimale d'énergie. Le résultat était partiellement dégagé par des travaux antérieurs mais de façon insuffisante, du point de vue de la rigueur de la démonstration et de la généralité, et à cause de la forme graphique ou algorithmique sous laquelle il était présenté, on s'est efforcé de remédier à cela. On discute ensuite l'intérêt de ce résultat pour le choix d'un réseau d'échangeurs de chaleur.

## 1. INTRODUCTION

LA CONCEPTION d'un réseau d'échangeurs de chaleur permettant d'effectuer des réchauffements et des refroidissements de certains courants, est une opération très classique dans l'industrie. Ces transferts thermiques s'effectuent dans des réseaux d'échangeurs de chaleur plus ou moins complexes. La conception optimale d'un réseau dépend de la structure, du nombre d'échangeurs de chaleur et de la quantité d'utilités chaudes (vapeur d'eau, fluides caloporteurs) ou froides (eau industrielle, fluides réfrigérants) requise pour obtenir des courants de sortie aux températures demandées. Ce problème d'optimisation technico-économique prend donc en compte les coûts d'installation liés aux surfaces de transfert et au nombre d'appareil, et les coûts d'exploitation qui dépendent principalement de l'énergie consommée. On a donc intérêt à retenir un réseau comportant un nombre peu élevé d'appareil et qui permette une grande récupération d'énergie par croisement des fluides chauds et froids.

Nous nous intéressons ici à la récupération d'énergie permettant d'effectuer l'une par l'autre, la totalité ou une partie des réchauffements par la totalité ou une partie des refroidissements exigés sans faire intervenir les utilités chaudes ou froides. Ce transfert d'énergie thermique a lieu dans un sous-réseau désigné réseau interne, caractérisé par deux paramètres fondamentaux : le flux de chaleur échangé  $Q$  et la différence de température minimale  $\Delta T$ . En effet  $Q$  traduit l'économie réalisée en ce qui concerne les utilités chaudes ou froides ;  $\Delta T$  est la valeur minimale de l'écart de température de part et d'autre de tout point de la surface d'échange dans la mesure où circulent, du côté froid, les courants à réchauffer et du côté chaud, les courants à refroidir. Ce paramètre revêt une grande importance car il constitue, compte tenu de sa relation avec l'aire d'échange du réseau interne,

une représentation aisée, bien qu'approximative, des coûts d'installation.

L'intérêt de choisir  $Q$  et  $\Delta T$ , l'un et l'autre aussi grands que possible conduit naturellement à se préoccuper de la valeur maximale  $Q_R(e)$  que peut prendre  $Q$  sous la contrainte  $\Delta T \geq e$ . Umeda *et al.* [1], Linnhoff et Flower [2, 3] ont proposé des procédures d'évaluation de  $Q_R(e)$  dans différentes conditions plus ou moins restrictives et toujours fondées sur des méthodes graphiques ou numériques. Nous montrons dans cet article qu'il est possible d'exprimer  $Q_R(e)$  sous la forme d'une expression mathématique simple et générale :

$$Q_R(e) = \min_{T_F, T_c} [q_F(T_F) + q_c(T_c)]$$

avec

$$T_c - T_F = e. \quad (1)$$

### 1.1. Définitions

$q_F$  et  $q_c$  sont respectivement les fonctions représentatives des réchauffements et des refroidissements exigés. Plus précisément,  $\forall T_F$ ,  $q_F(T_F)$  est le flux de chaleur à fournir au total aux courants à réchauffer dont les températures sont inférieures ou égales à  $T_F$ . De même,  $\forall T_c$ ,  $q_c(T_c)$  est le flux de chaleur à enlever au total aux courants à refroidir dont les températures sont supérieures ou égales à  $T_c$ .

On notera que  $q_F(T_F)$  et  $q_c(T_c)$  sont ainsi définies  $\forall T_F, T_c \in R$  même si  $T_F$  (respectivement  $T_c$ ) n'est pas la valeur d'une température concernée par au moins l'un des courants à réchauffer (resp. refroidir).

Nous désignerons par  $M(q_F, q_c, e)$  la borne inférieure des valeurs que peut prendre  $q_F(T_F) + q_c(T_c)$  lorsque  $T_F$  et  $T_c$  varient sous la contrainte  $T_c - T_F = e$ . La relation (1) s'écrit alors :

$$Q_R(e) = M(q_F, q_c, e). \quad (2)$$

On notera  $Q_F$  (resp.  $Q_c$ ) le flux de chaleur global

### NOMENCLATURE

Tous les flux de chaleur sont des quantités de chaleur par unité de temps.

$e$	écart de température variable	$Q_R(e)$	flux de chaleur récupérable sous la contrainte $\Delta T \geq e$
$e_1^L$	borne supérieure des valeurs de $e$ pour lesquelles $Q_R(e) = \text{Min}(Q_F, Q_c)$	$q_F$	fonction représentative des réchauffements demandés
$e_2^L$	borne inférieure des valeurs de $e$ pour lesquelles $Q_R(e) = 0$	$q_c$	fonction représentative des refroidissements demandés
$M(q_F, q_c, e)$	valeur maximum de $q_F(T_F) + q_c(T_c)$ lorsque $T_F$ et $T_c$ varient sous la contrainte $T_c - T_F = e$	$q_F^*$	fonction représentative d'une partie des réchauffements demandés
$N$	nombre de tranches de réchauffements et de tranches de refroidissements	$q_c^*$	fonction représentative d'une partie des refroidissements demandés
$N_D$	nombre de courants à réchauffer ou refroidir	$\Delta T$	valeur minimale de l'écart de température d'un réseau interne
$n$	indice d'une tranche de réchauffements et d'une tranche de refroidissements	$T_F, T_c$	températures variables
$Q$	flux de chaleur échangé dans un réseau interne	$T_F^*, T_c^*$	plus haute (resp. plus basse) température concernée par une certaine partie des réchauffements (resp. refroidissement) demandés
$Q_F, Q_c$	flux de chaleur consommé (resp. fourni) par les réchauffements (resp. refroidissements) demandés	$T_{cl}^L, T_{c2}^L$	plus basse et plus haute température concernée par les refroidissements demandés
$Q_F^*(n), Q_c^*(n)$	flux de chaleur consommé (resp. fourni) par la $n$ ième tranche des réchauffements (resp. refroidissements) demandés	$T_{F1}^L, T_{F2}^L$	plus basse et plus haute température concernée par les réchauffements demandés
$Q^*$	flux de chaleur ayant une valeur inférieure à $M(q_F, q_c, e)$	$T_{cl}^{L*}(n), T_{c1}^{L*}(n)$	plus haute (resp. plus basse) température concernée par la $n$ ième tranche des réchauffements (resp. refroidissements) demandés.

nécessaire à tous les réchauffements (resp. refroidissements) demandés.

$T_{F1}^L$  et  $T_{F2}^L$  (resp.  $T_{cl}^L$  et  $T_{c2}^L$ ) représentent la plus basse et la plus haute température concernée par les réchauffements (resp. refroidissements). Enfin  $N_D$  désigne le nombre global d'opérations de réchauffement et de refroidissement. A titre d'illustration, nous avons représenté sur la Fig. 1 les diverses variables introduites à savoir les fonctions  $q_F$ ,  $q_c$ , et  $Q_c$ ,  $Q_F$ ,  $T_{F1}^L$ ,  $T_{F2}^L$ ,  $T_{cl}^L$  et  $T_{c2}^L$ .

Enfin, nous dirons qu'un réseau d'échanges thermiques est à contre courant lorsque :

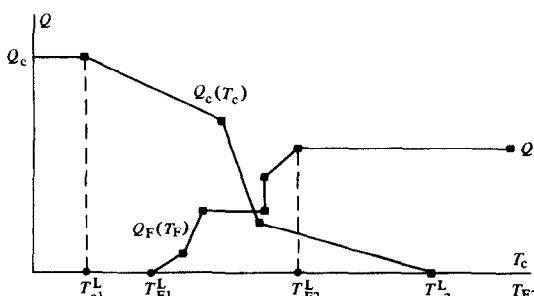


FIG. 1. Représentation schématique des fonctions  $q_F(T_F)$  et  $q_c(T_c)$ .

$$(T_{F2} - T_{F1})(T_{c2} - T_{c1}) \geq 0$$

où  $(T_{F1}, T_{c1})$  et  $(T_{F2}, T_{c2})$  sont deux couples de températures concernés par deux points quelconques de la surface d'échange, appartenant ou non au même échangeur.

#### 2. PROPRIETES DES FONCTIONS $q_F$ ET $q_c$

La formulation proposée montre que  $Q_R(e)$  ne dépend des réchauffements et des refroidissements que par l'intermédiaire des fonctions  $q_F$  et  $q_c$  qui les représentent globalement. Nous admettrons qu'elles possèdent, en tout cas, les propriétés suivantes, qui résultent de leurs définitions :

$q_F$  est une fonction croissante (au sens large) continue à droite, ayant un nombre fini (éventuellement nul) de discontinuités à gauche, nulle  $\forall T_F < T_{F1}^L$ , égale à  $Q_F \forall T_F \geq T_{F2}^L$ .

$q_c$  est une fonction décroissante (au sens large), continue à gauche, ayant un nombre fini (éventuellement nul) de discontinuités à droite, nulle  $\forall T_c > T_{c2}^L$ , égale à  $Q_c \forall T_c \leq T_{cl}^L$ .

##### 2.1. Cas particuliers

Si on admet qu'il n'y a aucun changement de phase lors des transferts et que les chaleurs spécifiques sont

indépendantes de la température dans les intervalles de température concernés, on peut démontrer certaines propriétés particulières intéressantes des fonctions  $q_F$  et  $q_c$ . Cependant ces deux hypothèses ne sont pas nécessaires à la validité de la relation (1) pour évaluer  $Q_R(e)$ . Avec la première hypothèse, les fonctions  $q_F$  et  $q_c$  sont continues et plus faciles à traiter mathématiquement que lorsqu'apparaissent les discontinuités dues aux changements de phases.

Le fait de supposer que les chaleurs spécifiques sont constantes permet de démontrer aisément que les fonctions  $q_F$  et  $q_c$  sont des fonctions affines par morceaux, ce qui facilite beaucoup, nous le verrons plus loin, le calcul de  $Q_R(e)$ . Ainsi, avec la conjonction des deux hypothèses,  $q_F$  et  $q_c$  sont des fonctions à la fois continues et affines par morceaux.

Enfin les valeurs de la température au voisinage desquelles  $q_F$  (resp.  $q_c$ ) est constante sont celles qui ne sont concernées par aucun des réchauffements demandés (resp. refroidissements). Par contre, si les réchauffements (resp. refroidissements) concernent toute température comprise entre  $T_{F1}^L$  et  $T_{F2}^L$  (resp. entre  $T_{c1}^L$  et  $T_{c2}^L$ ), alors la fonction  $q_F$  (resp.  $q_c$ ) est strictement croissante (resp. strictement décroissante) dans cet intervalle.

## 2.2. Cas de discontinuités

Dans le cas général,  $\forall T_F$  (resp.  $\forall T_c$ ), la fonction  $q_F$  (resp.  $q_c$ ) continue à droite (resp. à gauche) admet en  $T_F$  (resp.  $T_c$ ) une limite à gauche (resp. à droite) qui n'est pas nécessairement égale à  $q_F(T_F)$  (resp.  $q_c(T_c)$ ) mais au flux de chaleur consommé (resp. fourni) par la partie des réchauffements (resp. refroidissements) qui concerne des courants dont les températures sont strictement inférieures à  $T_F$  (resp. supérieures à  $T_c$ ). Le saut de discontinuités à gauche (resp. à droite) qui sépare (éventuellement) ce flux de chaleur de  $q_F(T_F)$  (resp.  $q_c(T_c)$ ) représente donc le flux de chaleur absorbé (resp. fourni) à la température  $T_F$  (resp.  $T_c$ ) sans élévation (resp. abaissement) de température ce qui à pression constante, ne peut avoir lieu qu'à l'occasion d'un changement de phase, d'un corps pur ou d'un mélange azéotropique. En effet pour un équilibre liquide-vapeur, d'un mélange non azéotropique, un transfert de chaleur entraîne non seulement une variation de la fraction vaporisée mais aussi un changement de la température d'équilibre. Le quotient de la quantité de chaleur mise en jeu par l'écart de température correspondant est équivalent à une chaleur spécifique. Ainsi, ce ne serait pas alors les fonctions  $q_F$  et  $q_c$  mais leurs dérivées premières, qui présenteraient des discontinuités.

## 3. ETABLISSEMENT DE LA FORMULATION

Un des avantages de la formulation proposée est qu'elle se prête bien à une démonstration rigoureuse à partir d'un minimum d'hypothèses physiques fondamentales.

Nous nous plaçons dans le cas général où les

fonctions  $q_F$  et  $q_c$  n'ont que les propriétés énoncées au début du paragraphe précédent. Ces propriétés suffisent pour établir que :

$M(q_F, q_c, e)$  qui est, par définition, la borne inférieure des valeurs que peut prendre l'expression  $q_F(T_F) + q_c(T_c)$  lorsque  $T_F$  et  $T_c$  varient sous la contrainte d'égalité  $T_c - T_F = e$ , est aussi la borne inférieure lorsque la contrainte devient  $T_c - T_F \leq e$ .

$M(q_F, q_c, e)$  est une fonction décroissante, au sens large de  $e$  telle que :

$$M(q_F, q_c, e) = \text{Min}(Q_F, Q_c)$$

pour des valeurs suffisamment petites de  $e$  (éventuellement négatives)

$$M(q_F, q_c, e) = 0$$

pour des valeurs suffisamment grandes de  $e$ .

Ainsi  $\forall e \in R$

$$0 \leq M(q_F, q_c, e) \leq \text{Min}(Q_F, Q_c).$$

Nous supposerons dans la suite de cette démonstration que  $e > 0$ .

### 3.1. Démonstration de l'inégalité $Q_R(e) \leq M(q_F, q_c, e)$

Supposons qu'il existe un réseau interne, effectuant une par l'autre, une partie des réchauffements et une partie des refroidissements demandés, qui permette d'échanger un débit de chaleur égal à  $Q$  et dont la différence de température minimale  $\Delta t$  soit au moins égale à  $e$ .

Soit  $T_c$  et  $T_F$  deux températures telles que  $T_c - T_F \leq e$  alors  $T_c - T_F \leq \Delta t$  et par conséquent, aucun transfert de chaleur n'a lieu entre un élément de courant chaud qui est à une température inférieure à  $T_c$  et un élément de courant froid qui se trouve à une température supérieure à  $T_F$ . Ainsi, toute quantité de chaleur comptée dans  $Q$ , ou bien provient d'un courant chaud dont la température est supérieure ou égale à  $T_c$  et est donc comptabilisée dans  $q_c(T_c)$ , ou bien est fournie à un courant froid dont la température est inférieure ou égale à  $T_F$  et est donc comptabilisée dans  $q_F(T_F)$  (a priori, l'une de ces deux possibilités n'exclut pas l'autre) ; par conséquent :

$$Q \leq q_F(T_F) + q_c(T_c)$$

d'où

$$Q \leq M(q_F, q_c, e)$$

et

$$Q_R(e) \leq M(q_F, q_c, e).$$

### 3.2. Démonstration de l'inégalité $Q_R(e) \geq M(q_F, q_c, e)$

Les deux principes fondamentaux de la thermodynamique suffisent pour affirmer qu'on peut effectuer les uns par les autres et à contre-courant, les réchauffements et les refroidissements demandés si :

$$Q_F = Q_c$$

$$T_{F2}^L < T_{c1}^L \quad (3)$$

et si de plus un seul réchauffement et un seul refroidissement sont exigés. On en déduit facilement, en considérant des divisions des divers courants concernés, que cette possibilité subsiste dans tous les cas où les conditions (3) sont satisfaites et cela, quels que soient le nombre de réchauffements et le nombre de refroidissements demandés. Dans ce cas le nombre d'échangeur est inférieur à  $N_D$  (le plus souvent, il est difficile de descendre en dessous de  $N_D - 1$ ).

Nous allons effectuer la démonstration de l'inégalité

$$Q_R(e) \geq M(q_F, q_c, e)$$

en deux étapes : dans la première, on établit que cette inégalité a lieu au moins dans le cas où

$$Q_F = M(q_F, q_c, e) = Q_c \quad (4)$$

puis on montrera, dans un second temps, qu'elle a lieu dans tous les cas.

### 3.3. Preuve dans le cas particulier où $Q_F = M(q_F, q_c, e) = Q_c$

Il suffit de prouver que quel que soit  $Q^*$  tel que  $0 < Q^* < M(q_F, q_c, e)$ , il est possible de trouver un réseau d'échanges thermiques satisfaisant les conditions suivantes :

(a) Les réchauffements (resp. refroidissements) qu'il effectue sont une partie des réchauffements (resp. refroidissements) demandés.

(b) Le flux de chaleur échangé est au moins égal à  $Q^*$ .

(c) La différence de température minimale  $\Delta T$  est au moins égale à  $e$ .

L'existence d'un tel réseau se prouve en s'appuyant sur la possibilité de diviser l'intervalle de température concerné par les réchauffements et celui concerné par les refroidissements. Ainsi, on peut diviser les réchauffements demandés en  $N$  tranches, numérotées de 1 à  $N$  de façon que chaque tranche mette en oeuvre le même flux de chaleur et qu'aucune température concernée par une tranche ne soit supérieure à une température concernée par une tranche de numéro supérieur.

On partage dans les mêmes conditions les refroidissements demandés en  $N$  tranches numérotées de 1 à  $N$ . On choisit  $N$  suffisamment grand pour avoir :

$$Q^* < \frac{N-1}{N} M(q_F, q_c, e).$$

Pour tout entier  $n$  tel que  $1 \leq n < N$ , désignons par  $Q_F^*(n)$  et  $T_{F2}^{L*}(n)$  (resp.  $Q_c^*(n)$  et  $T_{cl}^{L*}(n)$ ) le flux de chaleur utilisé (resp. fourni) par la  $n$ ème tranche des réchauffements (resp. refroidissements) demandés et la plus haute (resp. basse) température concernée par cette tranche, et montrons que :

$$T_{cl}^{L*}(n+1) - T_{F2}^{L*}(n) \geq e. \quad (5)$$

Supposons le contraire,  $T_{cl}^{L*}(n+1) - T_{F2}^{L*}(n) < e$ , alors on peut trouver  $T_F$  et  $T_c$  tels que :

$$T_F < T_{F2}^{L*}(n)$$

$$T_c > T_{cl}^{L*}(n+1)$$

$$T_c - T_F < e.$$

L'inégalité  $T_F < T_{F2}^{L*}(n)$  implique que  $q_F(T_F)$  est inférieur au flux de chaleur utilisé dans les  $n$  premières tranches de refroidissements, soit  $nQ_F/N$ .

L'inégalité  $T_c > T_{cl}^{L*}(n+1)$  implique que  $q_c(T_c)$  est inférieur au flux de chaleur fourni dans les  $N-n$  dernières tranches de réchauffements, soit  $(N-n)Q_c/N$ .

Donc :

$$\begin{aligned} q_F(T_F) + q_c(T_c) &< \left( \frac{n}{N} + \frac{N-n}{N} \right) M(q_F, q_c, e) \\ &= M(q_F, q_c, e) \end{aligned}$$

ce qui contredit l'hypothèse  $T_c - T_F < e$  et démontre donc l'inégalité (5).

De plus :

$$Q_F^*(n) = \frac{Q_F}{N} = \frac{M(q_F, q_c, e)}{N} = \frac{Q_c}{N} = Q_c^*(n+1)$$

et on a donc les conditions équivalentes à (3) :

$$Q_F^*(n) = Q_c^*(n+1)$$

$$T_{F2}^{L*}(n) < T_{cl}^{L*}(n+1).$$

Il est donc possible de constituer un réseau d'échanges thermiques à contre-courant comportant au plus  $(n-1)(N_D - 1)$  échangeurs en faisant effectuer, pour tout entier  $n$  tel que  $1 \leq n < N$ , l'une par l'autre, la  $n$ ème tranche des réchauffements demandés et la  $(n+1)$ ème tranche des refroidissements demandés. (On notera que la dernière tranche des réchauffements et la première tranche des refroidissements demandés peuvent être réalisées avec des utilisés chaudes et froides.) De plus, ce réseau est caractérisé par  $\Delta T \geq e$  et  $Q$  tel que :

$$Q = \frac{N-1}{N} M(q_F, q_c, e) > Q^*.$$

Il satisfait donc les conditions requises pur prouver que  $Q_R(e) \geq Q^*$  et en faisant  $Q^* \rightarrow M(q_F, q_c, e)$ , alors :

$$Q_R(e) \geq M(q_F, q_c, e) \quad \text{si} \quad Q_F = M(q_F, q_c, e) = Q_c.$$

### 3.4. Preuve dans le cas général

Pour démontrer l'inégalité dans le cas général, il suffit de montrer qu'on peut trouver  $q_F^*$  et  $q_c^*$  satisfaisant les condition suivantes :

$q_F^*$  (resp.  $q_c^*$ ) est la fonction représentative d'une partie des réchauffements (resp. refroidissements) demandés parmi celles qui utilisent (resp. fournissent) un flux de chaleur égal à  $M(q_F, q_c, e) = M(q_F^*, q_c^*, e)$ , ce qui permet de se ramener au cas particulier précédent.

Pour obtenir un couple  $q_F^*$  et  $q_c^*$  satisfaisant ces conditions, on considère la fonction représentative  $q_F^*$  (resp.  $q_c^*$ ) d'une partie des réchauffements (resp. refroidissements) demandés, qui minimise (resp. maxi-

mise) la valeur  $T_F^*$  (resp.  $T_c^*$ ) prise par la plus haute (resp. basse) température concernée, parmi celles qui consomment (resp. fournissent) un flux de chaleur égal à  $M(q_F, q_c, e)$ .

On vérifie aisément que ce couple de fonctions  $q_F^*$  et  $q_c^*$  est tel que :

$$\begin{aligned} q_F^*(T_F) &= q_F(T_F) && \text{si } T_F < T_F^* \\ q_F^*(T_F) &= M(q_F, q_c, e) && \text{si } T_F \geq T_c^* \\ q_c^*(T_c) &= q_c(T_c) && \text{si } T_c > T_c^* \\ q_c^*(T_c) &= M(q_F, q_c, e) && \text{si } T_c \leq T_c^*. \end{aligned}$$

Supposons  $T_c - T_F = e$ . Plusieurs cas sont alors possibles :

(a)  $T_F < T_F^*$  et  $T_c > T_c^*$  il vient :

$$q_F^*(T_F) + q_c^*(T_c) = q_F(T_F) + q_c(T_c) \geq M(q_F, q_c, e)$$

par définition.

(b) Dans tous les autres cas, il est immédiat que :

$$q_F^*(T_F) + q_c^*(T_c) = M(q_F, q_c, e) + q_F(T_F)$$

$$(\text{ou } q_c(T_c)) \geq M(q_F, q_c, e).$$

Ainsi, dans tous les cas l'inégalité  $q_F^*(T_F) + q_c^*(T_c) \geq M(q_F, q_c, e)$  est vraie si  $T_c - T_F = e$ , ce qui entraîne, par passage à la borne inférieure :

$$M(q_F^*, q_c^*, e) \geq M(q_F, q_c, e).$$

D'autre part :

$$q_F(T_F) + q_c(T_c) \geq q_F^*(T_F) + q_c^*(T_c)$$

par définition et si  $T_c - T_F = e$ , alors

$$q_F(T_F) + q_c(T_c) \geq q_F^*(T_F) + q_c^*(T_c) \geq M(q_F^*, q_c^*, e)$$

ce qui montre que, par passage à la borne inférieure :

$$M(q_F, q_c, e) \geq M(q_F^*, q_c^*, e).$$

Compte tenu des relations précédentes, il en résulte :

$$M(q_F, q_c, e) = M(q_F^*, q_c^*, e)$$

et  $q_F^*$  et  $q_c^*$  vérifient donc les conditions requises, ce qui achève de démontrer l'inégalité dans le cas général.

### 3.5. Remarques finales

Nous avons achevé la démonstration de la relation :

$$Q_R(e) = M(q_F, q_c, e).$$

La démonstration permet de conclure que dans tous les cas on peut constituer un réseau interne, à contre-courant comportant au plus  $(N-1)(N_D-1)$  échangeurs, tel que  $\Delta T \geq e$  et  $Q \geq (N-1)Q_R(e)/N$ . Par exemple,  $N_D-1$  échangeurs suffisent pour constituer un réseau interne, à contre-courant tel que  $\Delta T \geq e$  et  $Q \geq 1/2Q_R(e)$ .

Faisant tendre  $N$  vers l'infini on prouve qu'il est possible de constituer un réseau interne à contre-courant tel que  $\Delta T \geq e$ ,  $Q = Q_R(e)$ .

$Q_R(e)$  a été défini comme la plus grande valeur que peut prendre  $Q$  sous la contrainte  $\Delta T \geq e$ . En toute

rigueur la légitimité de cette définition repose sur un postulat que nous admettons et qui est toujours implicitement admis par l'ingénieur : parmi les valeurs que peut prendre  $Q$  sous la contrainte  $\Delta T \geq e$ , il y en a une qui est plus grande que les autres (ce qui n'est pas mathématiquement assuré). On peut remarquer que, même sans ce postulat, la démonstration de  $Q_R(e) = M(q_F, q_c, e)$  resterait valable, à condition de définir  $Q_R(e)$  comme la borne supérieure (non nécessairement atteinte) des valeurs que peut prendre  $Q$  sous la contrainte  $\Delta T \geq e$ .

Enfin précisons qu'en principe  $M(q_F, q_c, e)$  est définie pour  $e < 0$  contrairement à  $Q_R(e)$ . Cependant dans la suite, nous poserons, même si  $e < 0$ ,  $Q_R(e) = M(q_F, q_c, e)$ .

## 4. CHOIX DES PARAMETRES ( $\Delta T, Q$ ) D'UN RESEAU ET PROPRIETES DE LA FONCTION $Q_R(e)$

Nous avons déjà indiqué qu'il y avait intérêt à choisir  $Q$  et  $\Delta T$  l'un et l'autre aussi grands que possible. Cependant les raisons qui justifient un tel choix montrent aussi les limites de son intérêt.

En effet  $Q$ , énergie échangée dans le réseau, constitue une représentation pertinente mais imparfaite des coûts liés à la consommation des utilités ; une augmentation de  $Q$  ne signifie pas nécessairement une diminution de ces coûts. De même  $\Delta T$  constitue une représentation pertinente mais imparfaite de l'aire d'échange du réseau interne et par voie de conséquence, de l'aire d'échange totale du réseau et des coûts d'investissement et de réalisation. Ainsi, une augmentation de  $\Delta T$  ne signifie pas nécessairement une diminution de ces coûts. Ces remarques nous conduisent à accorder une attention particulière mais non exclusive aux couples  $(\Delta T, Q)$  tels que :

- (a)  $Q$  est maximale compte tenu de  $\Delta T$ .
- (b)  $\Delta T$  est maximal compte tenu de  $Q$ .

Dans ces deux conditions, nous dirons dans la suite que le couple  $(\Delta T, Q)$  est optimal de sorte que l'on a :

$$Q = Q_R(\Delta T)$$

pour tous les couples  $(\Delta T, Q)$  optimaux. Mais réciproquement, parmi les couples  $(\Delta T, Q)$  liés par la relation précédente, seuls sont optimaux ceux qui ne sont pas sur un palier de constance de la fonction  $Q_R(\Delta T)$  excepté pour l'extrémité droite de ce palier. Parmi les couples  $(\Delta T, Q)$  optimaux, le choix doit s'appuyer sur des considérations économiques faisant intervenir les coûts liés à la surface totale d'échange et ceux qui traduisent la consommation des utilités chaudes et froides. En général, les valeurs couramment admises pour  $\Delta T$  se situent dans un intervalle allant de 5 à 25°C, c'est pourquoi il est intéressant d'étudier plus particulièrement les couples  $(\Delta T, Q)$  optimaux tels que  $5 \leq \Delta T \leq 25^\circ\text{C}$ .

Comme la fonction  $M(q_F, q_c, e)$ , la fonction  $Q_R(e)$  est décroissante et il est judicieux de choisir une valeur

de  $\Delta T$  telle que la décroissance de  $Q_R(\Delta T)$  en fonction de  $\Delta T$  ne soit ni trop rapide à gauche de la valeur de  $\Delta T$  retenue (il y aurait alors intérêt à diminuer cette valeur), ni trop lente à droite (il y aurait alors intérêt à l'augmenter). Les cas extrêmes de décroissance lente correspondent à des paliers de constance tandis que les cas extrêmes de décroissance rapide correspondent à des sauts de discontinuité.

Il y a donc lieu de prêter attention aux valeurs de  $\Delta T$  pour lesquelles la dérivée à droite de la fonction  $Q_R(\Delta T)$  est distincte de la dérivée à gauche ; le cas où la dérivée à droite est supérieure (resp. inférieure) en valeur absolue étant plutôt favorable (resp. défavorable) au choix de  $\Delta T$ . La présence de telles irrégularités a pour origine le fait que, pour chaque courant concerné, un besoin de flux de chaleur (à prendre ou à fournir) apparaît brusquement à la température d'entrée et disparaît brusquement à la température de sortie. On doit s'attendre à ce que le nombre de ces irrégularités augmente avec  $N_D$ . L'amplitude de ces irrégularités est plutôt liée à d'importantes différences entre les débits massiques concernés.

Il semble que la présence de telles irrégularités, leur importance, si elles existent, doivent conduire à une étude de variations de  $Q_R(e)$  en fonction de  $e$  plus minutieuse que celle qui est faite habituellement, avec éventuellement l'identification de discontinuités ou de paliers soit de la fonction  $Q_R$ , soit de sa dérivée. C'est ce qui justifie la suite de ce travail.

#### 4.1. Propriétés de la fonction $e \rightarrow Q_R(e) = M(q_F, q_c, e)$

Nous avons déjà noté que cette fonction est décroissante, au sens large ; elle prend la valeur  $\text{Min}(Q_F, Q_c)$  pour des valeurs suffisamment petites de  $e$  ; elle est nulle pour des valeurs suffisamment grandes de  $e$ .

#### 4.2. Continuité à gauche

La fonction  $Q_R(e)$  est continue à gauche. En effet pour  $e \in R$  et  $\alpha \in R^+$ , on peut trouver un couple  $(T_F, T_c)$  tel que :

$$T_c - T_F = e$$

$$q_F(T_F) + q_c(T_c) \leq Q_R(e) + \frac{\alpha}{2}$$

En vertu de la continuité à droite de  $q_F$  et de la continuité à gauche de  $q_c$ , on peut trouver  $\beta \in R^+$  de telle sorte que  $\forall \Delta T_F, \forall \Delta T_c$ , si :

$$0 \leq \Delta T_F \leq \beta$$

$$0 \leq \Delta T_c \leq \beta$$

alors :

$$q_F(T_F) \leq q_F(T_F + \Delta T_F) \leq q_F(T_F) + \frac{\alpha}{4}$$

$$q_c(T_c) \leq q_c(T_c - \Delta T_c) \leq q_c(T_c) + \frac{\alpha}{4}$$

Donnons nous un  $\Delta e$  tel que :

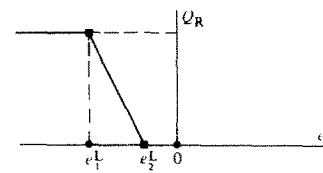


FIG. 2. Illustration schématique du cas 1.

$$0 \leq \Delta e \leq 2\beta.$$

On a :

$$\begin{aligned} Q_R(e) &\leq Q_R(e - \Delta e) \leq q_F \left( T_F + \frac{\Delta e}{2} \right) \\ &+ q_c \left( T_c - \frac{\Delta e}{2} \right) \leq q_F(T_F) + \frac{\alpha}{4} + q_c(T_c) + \frac{\alpha}{4} \end{aligned}$$

soit :

$$q_c(e - \Delta e) \leq Q_R(e) + \alpha$$

ce qui démontre la continuité à gauche.

#### 4.3. Continuité à droite

On peut démontrer que  $Q_R(e)$  possède un nombre fini (éventuellement nul) de discontinuités à droite.

#### 4.4. Classification des cas possibles

Une classification fondamentale des divers cas possibles est obtenue en considérant les signes des deux quantités  $e_1^L$  et  $e_2^L$  définies comme suit :

$e_1^L$  désigne la borne supérieure des valeurs de  $e$  pour lesquelles

$$Q_R(e) = \text{Min}(Q_F, Q_c).$$

$e_2^L$  désigne la borne inférieure des valeurs de  $e$  pour lesquelles

$$Q_R(e) = 0.$$

On a dans tous les cas :

$$T_{c1}^L - T_{F2}^L \leq e_1^L \leq e_2^L = T_{c2}^L - T_{F1}^L.$$

Nous allons examiner les 6 cas possibles.

(1)  $e_2^L < 0$  et donc  $e_1^L < 0$ .

Ce cas, représenté sur la Fig. 2, est extrêmement défavorable à la récupération de chaleur puisque  $Q_R(e) = 0$  pour  $e > 0$  et aucune récupération de chaleur n'est possible quel soit le  $\Delta T$  choisi.

(2)  $e_1^L > 0$  et donc  $e_2^L > 0$ .

Ce cas, représenté sur la Fig. 3, est extrêmement favorable à la récupération de chaleur puisque :

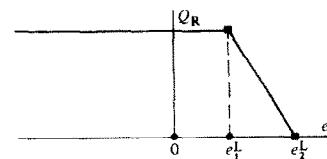


FIG. 3. Illustration schématique du cas 2.

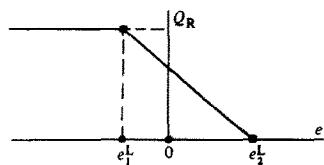


FIG. 4. Illustration schématique du cas 3.

$$Q_R(e) = \min(Q_F, Q_c) \text{ pour } e \leq e_1^L.$$

Il est donc possible, en choisissant  $\Delta T \leq e_1^L$  d'obtenir la récupération de chaleur maximale, ce qui permet de se passer d'utilités chaudes si  $Q_c \geq Q_F$  et de se passer d'utilités froides si  $Q_c \leq Q_F$ , donc de se passer des unes et des autres si  $Q_c = Q_F$ .

(3)  $e_1^L < 0 < e_2^L$ .

Ce cas, représenté sur la Fig. 4, est un cas intermédiaire car il est possible de récupérer de la chaleur si  $\Delta T < e_1^L$ . Cependant, quelle que soit la valeur de  $\Delta T$  choisi,  $\Delta T < e_2^L$ , il est impossible de récupérer un flux de chaleur égal à  $\min(Q_F, Q_c)$ ; il faut donc faire appel aux utilités chaudes et froides.

(4)  $e_2^L = 0$  et  $e_1^L < 0$ .

Ce cas frontière est représenté sur la Fig. 5. Aucune récupération de chaleur n'est possible quelle que soit la valeur de  $\Delta T$ .

(5)  $e_1^L = 0$  et  $e_2^L > 0$ .

Ce cas frontière est représenté sur la Fig. 6. Il est possible de récupérer de la chaleur pour  $\Delta T < e_2^L$  mais on ne peut atteindre la récupération maximale  $\min(Q_F, Q_c)$  bien que l'on puisse s'en approcher de fort près si  $\Delta T$  est suffisamment petit.

(6)  $e_1^L = 0 = e_2^L$ .

Ce cas extrême est représenté sur la Fig. 7 où l'on constate qu'aucune récupération de chaleur n'est possible bien que l'on puisse théoriquement être fort près d'une récupération maximale égale à  $\min(Q_F, Q_c)$ . Ce cas, à première vue, extravagant, correspond par exemple à la situation très simple où seraient demandées une vaporisation et une condensation à la même température.

#### 4.5. Propriétés particulières

La fonction  $Q_R(e)$  possède des propriétés particulières si  $q_F$  et  $q_c$  possèdent elles-mêmes des propriétés particulières outre celles qui leur sont attribuées en tout cas.

Si  $q_F$  et  $q_c$  sont continues (ce qui exclut les changements de phase) elles sont uniformément continues

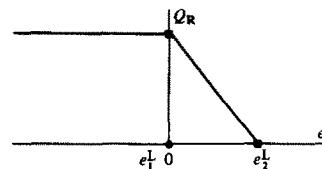


FIG. 6. Illustration schématique du cas 5.

et on en déduit aisément que  $Q_R(e)$  est elle-même continue et uniformément continue.

Si  $q_F$  est continue et strictement croissante dans l'intervalle  $(T_{F1}^L, T_{F2}^L)$  et si  $q_c$  est continue et strictement décroissante dans l'intervalle  $(T_{c1}^L, T_{c2}^L)$ , alors  $Q_R(e)$  est continue et strictement décroissante dans l'intervalle  $(e_1^L, e_2^L)$ .

Si  $q_F$  et  $q_c$  sont des fonctions continues et affines par morceaux, la fonction  $Q_R(e)$  est aussi continue et affine par morceaux. Ce dernier résultat est très important pour les applications numériques et pratiques. Nous en donnerons la démonstration et des utilisations dans la seconde partie de ce travail.

## 5. CONCLUSION

L'évaluation de  $Q_R(e)$  pour  $e$  donné se faisait jusqu'ici par voie graphique ou algorithmique, et sans souci de donner une démonstration générale et rigoureuse des procédures utilisées.

La relation (1) donne de  $Q_R(e)$  une expression analytique relativement simple et tout à fait générale. Elle a été démontrée rigoureusement en admettant seulement les deux premiers principes de la thermodynamique. En particulier, ni la constance des chaleurs spécifiques, ni l'exclusion des changements de phase ne sont nécessaires.

Une telle expression de  $Q_R(e)$  nous paraît d'autant plus utile que nous avons mis en évidence l'intérêt, pour le problème du choix du réseau interne, des irrégularités (brusques changements de pente) dans les variations de  $Q_R(e)$  en fonction de  $e$ , irrégularités analogues dans les variations de  $q_F(T_F)$  en fonction de  $T_F$  et dans celle de  $q_c(T_c)$  en fonction de  $T_c$ .

Nous avons amorcé l'étude des variations de  $Q_R(e)$  en fonction de  $e$ , il paraît nécessaire de la poursuivre, pour cela nous renvoyons à la seconde partie de ce travail.

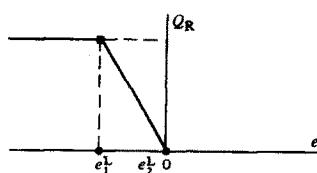


FIG. 5. Illustration schématique du cas 4.

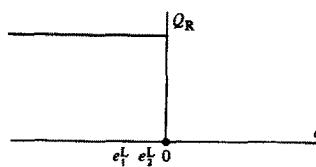


FIG. 7. Illustration schématique du cas 6.

**BIBLIOGRAPHIE**

1. T. Umeda, J. Itoh and K. Shiroko, Heat exchange system synthesis, *Chem. Engng Prog.* **74**, 70–76 (1978).
2. B. Linnhoff and J. R. Flower, Synthesis of heat exchanger networks—I. Systematic generation of energy optimal networks, *A.I.Ch.E. Jl* **24**, 633–642 (1978).
3. B. Linnhoff and J. R. Flower, Synthesis of heat exchanger networks—II. Evolutionary generation of networks with various criteria of optimality, *A.I.Ch.E. Jl* **24**, 642–653 (1978).

**OPTIMAL ENERGY RECOVERY IN HEAT EXCHANGER NETWORKS—I.  
THEORETICAL STUDY**

**Abstract**—A fundamental study of the heat exchanger network theory relating to the optimal energy recovery is presented. The result was partially and insufficiently derived in some previous works, from both the derivation exactness and generality angle and because of the graphical or algorithmic method used to present it; these difficulties are surmounted in this paper. The advantage of this result for choosing a heat exchanger network is then discussed.

**OPTIMALE WÄRMERÜCKGEWINNUNG IN WÄRMEAUSTAUSCHER-  
NETZWERKEN—I. THEORETISCHE UNTERSUCHUNG**

**Zusammenfassung**—Die Theorie der Wärmeaustauscher-Netzwerke wird im Hinblick auf optimale Wärmerückgewinnung grundlegend untersucht. Das Problem wurde in einigen früheren Arbeiten unvollkommen und unzureichend behandelt. Dies gilt für die Genauigkeit der Ableitung, die Allgemeingültigkeit und die grafische und algorithmische Methode, mit der das Ergebnis dargestellt wurde. Diese Schwierigkeiten wurden im vorliegenden Beitrag überwunden. Der Vorteil des hier gewonnenen Ergebnisses bezüglich der Auswahl eines Wärmeaustauscher-Netzwerks wird abschließend diskutiert.

**ОПТИМАЛЬНАЯ РЕГЕНЕРАЦИЯ ЭНЕРГИИ В СЕТЯХ ТЕПЛООБМЕННИКОВ—  
I. ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ**

**Аннотация**—Выполнено исследование сети теплообменников, описывающей оптимальную регенерацию энергии. Ранее полученные результаты являются неудовлетворительными с точки зрения точности формул и диапазона применимости, так как они представлены в виде графиков и алгоритмов. В данной статье эти недостатки преодолены. Обсуждаются преимущества полученных результатов для выбора сети теплообменников.